MOMENT ÇIKARAN FONKSİYON

X kesikli bir t.d., ~~olsun~~ ve olasılık fonksiyonu p(x) olsun. Tüm t değerleri için X'in moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$M_x(t) = E(e^{t.x}) = \sum_{R_x} e^{t.x} . p(x)$$

X sürekli ise

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{R_x} e^{tx} f(x) . dx .$$

Teorem: X, t.d.nin moment çıkaran fonksiyonu $M_x(t)$ olsun. a ve b sabitler olmak üzere $y = ax + b$ t.d.nin moment çıkaran fonksiyonu;

$$M_y(t) = e^{bt} . M_x(at) \text{ dır.}$$

İspat: Tanımdan;

$$M_y(t) = E(e^{ty})$$

$$= E(e^{t.(ax+b)}) = E(e^{atx} . e^{tb})$$

$$\Rightarrow M_y(t) = e^{t.b} . E(e^{at.x}) = e^{tb} . M_x(a.t)$$

bulunur.

SONUÇ: $M_X(0) = 1$.

X t.d. kesikli ise,

$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{\mathbb{R}_X} e^{tx} \cdot p(x) = \sum_{\mathbb{R}_X} e^{0} \cdot p(x) = 1$

X t.d. sürekli ise

$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{\mathbb{R}_X} e^{tx} \cdot p(x)dx = \int_{\mathbb{R}_X} 1 \cdot p(x) \cdot dx$

$= x \cdot p(x)$

TEOREM: X, t.d. nin beklenen değeri μ, Varyansı σ^2 olsun. $(X-\mu)$'nün M.G.F. nu,

$M_{(X-\mu)}(t) = e^{-\mu t} \cdot M_X(t)$

İspat: $M_{(X-\mu)}(t) = E\left(e^{(X-\mu) \cdot t}\right) = e^{-\mu t} \cdot E\left(e^{x \cdot t}\right)$

$= e^{-\mu t} \cdot M_X(t)$

bulunur.

ÖZELLİKLERİ

1.) $M_{c_1 X + c_2}(t) = E\left[e^{(c_1 X + c_2) \cdot t}\right] = E\left[e^{c_1 t x} \cdot e^{c_2 t}\right]$

$= e^{c_2 \cdot t} \cdot M_X(c_1 \cdot t)$

olur.

2.) $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$, X ve Y t.d.leri bağımsız ise

3.) $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left[e^{\left(\frac{X+a}{b}\right) \cdot t}\right]$

$= E\left[e^{\frac{a}{b} \cdot t} \cdot e^{x \cdot \frac{t}{b}}\right] = e^{\frac{a}{b} \cdot t} \cdot M_X(t/b)$

İlgili M.G.F. nun r. türevi alınıp burada $t=0$ koyulursa Orijin etrafındaki (m_r) Momentleri bulunur.

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

burada r. türev alınırsa

$$\left.\frac{\partial^{(r)} M_x(t)}{\partial t^r}\right|_{t=0} = E(x^r) = m_r \quad \text{bulunur.}$$

Bunu ispatlamak aşağıdaki şekilde de mümkündür:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M_x'(t) = E(x \cdot e^{tx})$$

$$\Rightarrow M_x'(0) = E(x \cdot e^0) = E(x) = m_1$$

$$M_x''(t) = E(x^2 \cdot e^{tx})$$

$$\Rightarrow M_x''(0) = E(x^2) = m_2$$

Bunu daha genel olarak görebilmek için e^{tx} in sıfır etrafındaki Maclaurin açılımına bakılırsa;

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{t^r}{r!} \cdot x^r \cdots$$

$$\Rightarrow E(e^{tx}) = 1 + t \cdot E(x) + \frac{t^2}{2!} \cdot E(x^2) + \cdots + \frac{t^r}{r!} \cdot E(x^r) + \cdots$$

$$= 1 + t \cdot m_1 + \frac{t^2}{2!} \cdot m_2 + \cdots + \frac{t^r}{r!} \cdot m_r + \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{t^r}{r!}\right) \cdot m_r \quad \text{elde edilir.}$$

Not: Her dağılım fonksiyonunun moment çıkaran fonksiyonu tektir. Uygulamada iki dağılımın M.G.F. bulunuyorsa ve bunlar birbirine eşit ise dağılımları da aynıdır denir.

ÖRNEK: X, t.d. nin olasılık fonksiyonu

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1,2 \\ \frac{1}{2}, & x = 3 \end{cases}$$

veriliyor. X'in M.G.F. bulunuz, bu fonksiyon yardımıyla $E(x)$ ve $V(x)$'i hesaplayınız? Değişim katsayısını bulunuz

ÇÖZÜM: M.G.F.

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=1}^{3} e^{tx_i} \cdot p(x)$$

$$= e^t \cdot \frac{1}{4} + e^{2t} \cdot \frac{1}{4} + e^{3t} \cdot \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$E(x) = m_1 = M'_x(t=0) = e^t \cdot \frac{1}{4} + e^{2t} \cdot \frac{2}{4} + e^{3t} \cdot \frac{3}{2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$m_2 = E(x^2) = M''_x(t=0) = e^t \cdot \frac{1}{4} + e^{2t} \cdot \frac{4}{4} + e^{3t} \cdot \frac{9}{2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{2} = 5,75$$

Böylece; $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = m_2 - m_1^2$

$$= (5,75) - (2,25)^2 = 0,6875$$

$$D.K. = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{0,6875}}{2,25} = 0,368$$